

**一、选择题：**共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效。

1. 设  $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 则  $f(x)$  在  $x=0$  处 ( ) .

- (A) 不连续; (B) 连续, 但不可导; (C) 可导, 但导函数不连续; (D) 可导, 且导函数连续.

2. 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列  $x^3$  高阶无穷小的是 ( ) .

- (A)  $1 - e^x$ ; (B)  $\ln(1 - x^3)$ ; (C)  $\arcsin(3x^2)$ ; (D)  $1 - \cos(x^2)$ .

3. 函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{nx}}{1 + e^{nx}}$  的第一类间断点为 ( ) .

- (A)  $x=1$ ; (B)  $x=-1$ ; (C)  $x=0$ ; (D) 以上都不是.

4. 设  $f(x) \in C^{(2)}$ , 且  $f'(0)=0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|}=1$ , 则 ( ) 成立.

- (A)  $f(0)$  不是  $f(x)$  的极值,  $(0, f(0))$  也不是曲线  $y=f(x)$  的拐点;

- (B)  $f(0)$  是  $f(x)$  的极小值;

- (C)  $(0, f(0))$  是曲线的拐点;

- (D)  $f(0)$  是  $f(x)$  的极大值.

5. 设  $f(x) \in C$ , 且  $F(x) = \int_x^{e^{-x}} f(t)dt$ , 则  $F'(x) =$  ( ) .

- (A)  $-e^{-x} f(e^{-x}) - f(x)$ ; (B)  $-e^{-x} f(e^{-x}) + f(x)$ ;

- (C)  $e^{-x} f(e^{-x}) - f(x)$ ; (D)  $e^{-x} f(e^{-x}) + f(x)$ .

6. 设  $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^4 x dx$ ,  $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx$ ,  $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx$  则 ( ).

- (A)  $N < P < M$ ; (B)  $M < P < N$ ; (C)  $N < M < P$ ; (D)  $P < M < N$ .

**二、填空题：**共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分。请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效。

1. 设函数  $f(x)$  在  $[-r, r]$  ( $r > 0$ ) 有定义, 且  $\forall x \in (-r, r)$ , 有  $|f(x)| \leq x^2$ , 则  $f'(0) =$  \_\_\_\_\_.

2. 计算积分  $\int_{-1}^2 x e^{|x|} dx =$  \_\_\_\_\_.

3. 设  $F(x) = \sin(x^2) \int_0^1 f(t \sin(x^2)) dt$ , 则  $\frac{dF}{dx} =$  \_\_\_\_\_.

4. 设  $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$ , 则  $y''|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 曲线  $y = \frac{x^3+4}{x^2}$  的斜渐近线为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

6. 设  $\int xf(x)dx = \arctan x + C$  ( $C$  为任意常数), 则  $\int \frac{dx}{f(x)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**三、计算题:** 满分 10 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(e^x - \sqrt{1+2x})}{\ln(1+x)(1-\cos x)}$ .

**四、计算题:** 满分 10 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

计算定积分  $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}} dx$

**五、计算题:** 满分 10 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

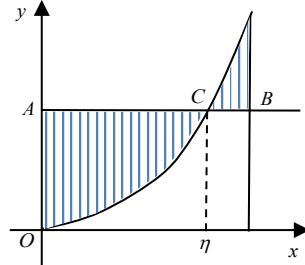
设曲线方程为  $\begin{cases} x = 2(\ln \tan \frac{t}{2} + \cos t), \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ , 求 (1)  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ ; (2) 曲线在  $t = \frac{\pi}{4}$  对应点处的曲率.

**六、计算题:** 满分 10 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

如图所示, 曲线  $y = x^2$  在  $[0,1]$  的一段与平行于  $x$  轴

的直线  $AB$  交于  $C$ ,  $C$  的横坐标为  $\eta$  ( $\eta \in [0,1]$ ).

问  $\eta$  为何值时, 阴影部分面积  $S$  最小? 并求最小值.



**七、计算题:** 满分 10 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

计算不定积分  $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx$ .

**八、证明题:** 满分 8 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可导,  $f(0) = f(1) = 0, f(\frac{1}{2}) = 1$ .

证明: 在  $(0,1)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f'(\xi) = 1$ .

**九、证明题:** 满分 6 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

设数列  $\{x_n\}$  满足:  $0 < x_n < 1, (1-x_n)x_{n+1} > \frac{1}{4}, n \in N_+$ . 证明: 数列  $\{x_n\}$  收敛, 并求其极限.