

一、选择题：共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效。

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ()。

(A) 不连续； (B) 连续，但不可导； (C) 可导，但导函数不连续； (D) 可导，且导函数连续。

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时，下列为 x^3 高阶无穷小的是 ()。

(A) $1 - e^x$ ； (B) $\ln(1 - x^3)$ ； (C) $\arcsin(3x^2)$ ； (D) $1 - \cos(x^2)$ 。

3. 函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{nx}}{1 + e^{nx}}$ 的第一类间断点为 ()。

(A) $x=1$ ； (B) $x=-1$ ； (C) $x=0$ ； (D) 以上都不是。

4. 设 $f(x) \in C^{(2)}$ ，且 $f'(0)=0$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$ ，则 () 成立。

(A) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值， $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；

(C) $(0, f(0))$ 是曲线的拐点；

(D) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值。

5. 设 $f(x) \in C$ ，且 $F(x) = \int_x^{e^{-x}} f(t)dt$ ，则 $F'(x) =$ ()。

(A) $-e^{-x}f(e^{-x}) - f(x)$ ； (B) $-e^{-x}f(e^{-x}) + f(x)$ ；

(C) $e^{-x}f(e^{-x}) - f(x)$ ； (D) $e^{-x}f(e^{-x}) + f(x)$ 。

6. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^4 x dx$ ， $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx$ ， $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx$ 则 ()。

(A) $N < P < M$ ； (B) $M < P < N$ ； (C) $N < M < P$ ； (D) $P < M < N$ 。

二、填空题：共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分。请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效。

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[-r, r]$ ($r > 0$) 有定义，且 $\forall x \in (-r, r)$ ，有 $|f(x)| \leq x^2$ ，则 $f'(0) =$ _____。

2. 计算积分 $\int_{-1}^2 x e^{|x|} dx =$ _____。

3. 设 $F(x) = \sin(x^2) \int_0^1 f(t \sin(x^2)) dt$ ，则 $\frac{dF}{dx} =$ _____。

4. 设 $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$, 则 $y''|_{x=0} =$ _____.

5. 曲线 $y = \frac{x^3+4}{x^2}$ 的斜渐近线为 _____.

6. 设 $\int xf(x)dx = \arctan x + C$ (C 为任意常数), 则 $\int \frac{dx}{f(x)} =$ _____.

三、计算题：满分 10 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(e^x - \sqrt{1+2x})}{\ln(1+x)(1-\cos x)}$.

四、计算题：满分 10 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

计算定积分 $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}} dx$

五、计算题：满分 10 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

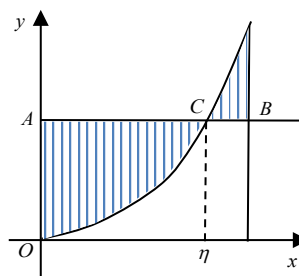
设曲线方程为 $\begin{cases} x = 2(\ln \tan \frac{t}{2} + \cos t) \\ y = 2 \sin t \end{cases}$, 求 (1) $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$; (2) 曲线在 $t = \frac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率.

六、计算题：满分 10 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

如图所示, 曲线 $y = x^2$ 在 $[0,1]$ 的一段与平行于 x 轴

的直线 AB 交于 C , C 的横坐标为 η ($\eta \in [0,1]$).

问 η 为何值时, 阴影部分面积 S 最小? 并求最小值.



七、计算题：满分 10 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

计算不定积分 $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx$.

八、证明题：满分 8 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, $f(0) = f(1) = 0, f(\frac{1}{2}) = 1$.

证明: 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = 1$.

九、证明题：满分 6 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

设数列 $\{x_n\}$ 满足: $0 < x_n < 1, (1-x_n)x_{n+1} > \frac{1}{4}, n \in N_+$. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.