

一、选择题：共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分.

1. 已知数列  $\{a_n\}$  ( $a_n > 0, n=1,2,\dots$ ) 满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ , 则 ( ) .

- (A)  $\{a_n\}$  的敛散性不定 (B)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \neq 0$  (C)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  不存在 (D)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

2. 曲线  $y = e^x \sqrt{1+x^2}$  的渐近线条数有 ( ) 条.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

3. 下列极限不能用洛必达法则求的是 ( ).

$$(A) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} \quad (B) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{x^2 - 1} \quad (C) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\operatorname{arccot} x} \quad (D) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

4. 已知  $f(x)$  二阶可导,  $f'(x) < 0, f''(x) > 0, \Delta x > 0$ , 则在  $x_0$  点有 ( ).

- (A)  $\Delta y < dy < 0$  (B)  $dy > \Delta y > 0$  (C)  $\Delta y > dy > 0$  (D)  $dy < \Delta y < 0$

5. 下列选项正确的是 ( ).

$$(A) \lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = a, \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f[u(x)] = a$$

$$(B) \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = a, \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = u_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f[u(x)] = a$$

$$(C) \lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f[u(x)] \neq a$$

$$(D) \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f[u(x)] = \infty$$

6. 下列说法不正确的有 ( ) 个.

1) 若  $f(x)$  在  $x_0$  点不可导, 则  $f(x)$  在  $M_0(x_0, f(x_0))$  点曲率不存在.

2) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e$ .

3) 若  $f(x)$  在  $[a,b]$  上非负且  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , 则在  $[a,b]$  上  $f(x) = 0$ .

4) 若  $f(x)$  在  $[a,b]$  上存在原函数, 则  $f(x)$  在  $[a,b]$  上可积.

5) 若  $f(x)$  在  $[a,b]$  上可积, 则  $f(x)$  在  $[a,b]$  上存在原函数.

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

二、填空题：共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分.

1. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left( 1 + \frac{2}{n} \right) + \cdots + \ln \left( 1 + \frac{n}{n} \right) \right] \frac{1}{n} =$  \_\_\_\_\_.

2. 已知  $f(x)$  在  $x_0$  点可导, 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} =$  \_\_\_\_\_.

3. 曲线  $y = \frac{1}{2}x^2$  的弧微分  $ds =$  \_\_\_\_\_.

4. 曲线  $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$  ( $a > 0$ ) 在  $t=1$  处对应的曲率半径为\_\_\_\_\_.

5. 设  $y = f(x)$  由方程  $y - x^2 + e^y = 1$  所确定, 则  $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0} = \text{_____}$ .

6.  $\int_0^\pi \sin^6 x dx = \text{_____}$ .

三、计算题: 满分 10 分. 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-\cos x)}{x - \sin x}$ .

四、计算题: 满分 10 分. 已知  $y = y(x)$  由方程  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$  确定, 求  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

五、计算题: 满分 10 分. 计算  $\int 2x \arctan x dx$ .

六、计算题: 满分 10 分. 计算  $\int_0^\pi x \sqrt{\sin^2 x - \sin^4 x} dx$ .

七、计算题: 满分 10 分.

(1) 如何用导数判别函数的单调性;

(2) 已知  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$ , 证明当  $x > 0$  时, 函数  $f(x) = \left[ \frac{1}{2}(a_1^x + a_2^x) \right]^{\frac{1}{x}}$  单调增.

八、计算题: 满分 8 分.

(1) 叙述数列极限的夹挤定理;

(2) 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \left( 1 + \frac{2}{n^2} \right) \cdots \left( 1 + \frac{n}{n^2} \right)$ .

九、证明题: 满分 6 分.

(1) 叙述 Rolle 定理;

(2) 已知函数  $f(x)$  可导,  $f(-1) = f'(-1) = 0$ ,  $f(0) = \eta$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ , 其中  $\eta$  为参数, 问至少存在几个不同的  $\xi \in \mathbb{R}$ , 使得

$$2f'(\xi) - 3(\xi^2 + \xi)f(\xi) = 0.$$