

一、选择题：共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分

1.  $\{x_n\}$  单调，则  $\{x_n\}$  有界是  $\{x_n\}$  收敛的 ( ) 条件 .

- (A) 充分必要 (B) 必要非充分 (C) 充分非必要 (D) 非充分非必要

2. 函数  $f(x) = x \ln \left( 1 + e^{\frac{1}{x}} \right)$ ，则  $x=0$  为  $f(x)$  的 ( ) .

- (A) 跳跃型间断点 (B) 可去型间断点 (C) 振荡型间断点 (D) 无穷型间断点

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ，则 ( ) .

- (A) 当  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \frac{1}{x} = A$  时， $f'(0) = A$  (B) 当  $f'(0) = A$  时， $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \frac{1}{x} = A$   
(C) 当  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = A$  时， $f'(0) = A$  (D) 当  $f'(0) = A$  时， $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = A$

4.  $\int x f(x) dx = \arcsin x + C$ ，则  $\int \frac{1}{f(x)} dx = ( )$  .

- (A)  $\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$  (B)  $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$  (C)  $\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$  (D)  $-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

5. 函数  $f(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$ ， $g(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$ ，则 ( ) .

- (A)  $f(x)$  是奇函数， $g(x)$  是偶函数 (B)  $f(x)$  是偶函数， $g(x)$  是奇函数  
(C)  $f(x)$  是奇函数， $g(x)$  是奇函数 (D)  $f(x)$  是周期函数， $g(x)$  是周期函数

6. 下列说法正确的有 ( ) 个.

- 1) 若数列  $\left\{ a_n + \frac{1}{a_n} \right\}$  发散，则  $\{a_n\}$  不一定发散  
2) 若数列  $\{e^{a_n} - e^{-a_n}\}$  发散，则  $\{a_n\}$  不一定发散  
3) 若数列  $\left\{ \frac{e^{a_n} - e^{-a_n}}{e^{a_n} + e^{-a_n}} \right\}$  发散，则  $\{a_n\}$  不一定发散  
4) 若数列  $\left\{ a_n - \frac{1}{a_n} \right\}$  收敛，则  $\{a_n\}$  不一定收敛  
5) 若数列  $\left\{ \frac{1}{e^{a_n} + e^{-a_n}} \right\}$  收敛，则  $\{a_n\}$  不一定收敛

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

二、填空题：共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax^2)^{\sin x} - 1}{x^3} = 6$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

2. 曲线  $y^2 = x$  在点  $(0,0)$  处的曲率圆方程为\_\_\_\_\_.

3. 曲线  $y = \frac{x^2}{x+1}$  的斜渐近线为\_\_\_\_\_.

4. 函数  $f(x) = (e^x + 1)x^2$ , 则  $f^{(5)}(1) =$ \_\_\_\_\_.

5.  $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx =$ \_\_\_\_\_.

6.  $\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt =$ \_\_\_\_\_.

三、计算题：满分 10 分. 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x)}{x - \sin x}$ .

四、计算题：满分 10 分. 设  $y = f(x)$  由方程  $y - xe^y = 1$  所确定, 求  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$ .

五、计算题：满分 10 分. 求  $y = x^2 + \frac{1}{x}$  的极值、拐点.

六、计算题：满分 10 分. 计算  $\int_0^2 \frac{|1-x|}{\sqrt{2-2x+x^2}} dx$ .

七、计算题：满分 10 分. 计算  $\int \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx$ .

八、证明题：满分 8 分.

已知  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上连续, 且  $f(x)$  为偶函数, 证明  $\int_0^\pi xf(\cos x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\cos x) dx$ , 并由此

计算  $\int_0^\pi \frac{x \sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$ .

九、证明题：满分 6 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

已知  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导,  $f(c)f'(c) \geq \left[ \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \right]^2$ ,  $c = \frac{a+b}{2}$ ,  $b-a > 4$ , 证明

$\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $f''(\xi) + f(\xi) = 0$ .