

一、选择题：共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分

1. $\{x_n\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 有界是 $\{x_n\}$ 收敛的 () 条件。
- (A) 充分必要 (B) 必要非充分 (C) 充分非必要 (D) 非充分非必要
2. 函数 $f(x) = x \ln \left(1 + e^{\frac{1}{x}} \right)$ ，则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的 ()。
- (A) 跳跃型间断点 (B) 可去型间断点 (C) 振荡型间断点 (D) 无穷型间断点
3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ，则 ()。
- (A) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \frac{1}{x} = A$ 时， $f'(0) = A$ (B) 当 $f'(0) = A$ 时， $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \frac{1}{x} = A$
(C) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = A$ 时， $f'(0) = A$ (D) 当 $f'(0) = A$ 时， $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = A$
4. $\int x f(x) dx = \arcsin x + C$ ，则 $\int \frac{1}{f(x)} dx = ()$ 。
- (A) $\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$ (B) $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$ (C) $\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$ (D) $-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$
5. 函数 $f(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$, $g(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$ ，则 ()。
- (A) $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数 (B) $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数
(C) $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是奇函数 (D) $f(x)$ 是周期函数, $g(x)$ 是周期函数
6. 下列说法正确的有 () 个。
- 1) 若数列 $\left\{ a_n + \frac{1}{a_n} \right\}$ 发散，则 $\{a_n\}$ 不一定发散
- 2) 若数列 $\{e^{a_n} - e^{-a_n}\}$ 发散，则 $\{a_n\}$ 不一定发散
- 3) 若数列 $\left\{ \frac{e^{a_n} - e^{-a_n}}{e^{a_n} + e^{-a_n}} \right\}$ 发散，则 $\{a_n\}$ 不一定发散
- 4) 若数列 $\left\{ a_n - \frac{1}{a_n} \right\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 不一定收敛
- 5) 若数列 $\left\{ \frac{1}{e^{a_n} + e^{-a_n}} \right\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 不一定收敛
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

二、填空题：共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分。

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax^2)^{\sin x} - 1}{x^3} = 6$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 曲线 $y^2 = x$ 在点 $(0,0)$ 处的曲率圆方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 曲线 $y = \frac{x^2}{x+1}$ 的斜渐近线为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 函数 $f(x) = (e^x + 1)x^2$, 则 $f^{(5)}(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. $\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题：满分 10 分。计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x)}{x - \sin x}$.

四、计算题：满分 10 分。设 $y = f(x)$ 由方程 $y - xe^y = 1$ 所确定，求 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0}$.

五、计算题：满分 10 分。求 $y = x^2 + \frac{1}{x}$ 的极值、拐点。

六、计算题：满分 10 分。计算 $\int_0^2 \frac{|1-x|}{\sqrt{2-2x+x^2}} dx$.

七、计算题：满分 10 分。计算 $\int \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx$.

八、证明题：满分 8 分。

已知 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续，且 $f(x)$ 为偶函数，证明 $\int_0^\pi x f(\cos x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\cos x) dx$ ，并由此

计算 $\int_0^\pi \frac{x \sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$.

九、证明题：满分 6 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

已知 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导， $f(c)f'(c) \geq \left[\max_{x \in [a, b]} |f(x)| \right]^2$, $c = \frac{a+b}{2}$, $b-a > 4$ ，证明

$\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) + f(\xi) = 0$.