一、选择题：共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

1. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$均是 4 维列向量，且行列式$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=1$，行列式$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=3$，则行列式$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$（　　）.

(A) 32；　(B) 31；　(C) 16；　(D) 15.

2. 设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵，$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，若$\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^2=\begin{bmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{A}=$（　　）.

(A) $\begin{bmatrix}c&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{bmatrix}$；　(B) $\begin{bmatrix}b&0&0\\0&c&0\\0&0&a\end{bmatrix}$；　(C) $\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}$；　(D) $\begin{bmatrix}c&0&0\\0&b&0\\0&0&a\end{bmatrix}$.

3. 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$是$n$维列向量，向量组(I)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$,向量组(II)$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_t$，则下列结论中正确的是（　　）.

(A) 若(I)线性无关，则(II)线性无关；　(B) 若(II)线性相关，则(I)线性相关；

(C) 若(II)线性无关，则(I)线性无关；　(D) (I)与(II)具有相同的线性相关性.

4. 设齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$有通解$\boldsymbol{x}=k\begin{bmatrix}1\\0\\2\\-1\end{bmatrix}$，其中$k$是任意常数，$\boldsymbol{A}$中去掉第$i$列$(i=1,2,3,4)$所得的矩阵记为$\boldsymbol{A}_i$，则下列方程组中有非零解的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$；　(B) $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$；　(C) $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$；　(D) $\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$.

5．设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为$\boldsymbol{A}$的属于特征值1的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_3$为$\boldsymbol{A}$的属于特征值$-1$的特征向量，则满足$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$的可逆矩阵$\boldsymbol{P}$可为（　　）.

(A) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$；　(B) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3)$；

(C) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$；　(D) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)$.

6. 设V是3阶实对称矩阵全体的集合，对于通常的矩阵加法和数乘两种运算构成实数域上的线性空间，则该线性空间V的维数为（　　）.

(A) 3；　(B) 4；　(C) 5；　(D) 6.

二、填空题：共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

1. 设$\boldsymbol{A}$是 5 阶方阵，且$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=$____________.

2. 已知 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$中第 2 行元素分别为$1,1,2$，第 3 行元素分别为$2,2,1$，A_{ij}为$\boldsymbol{A}$的行列式中元素a_{ij}的代数余子式，且$|\boldsymbol{A}|=-9$，则$A_{31}+A_{32}-3A_{33}=$______.

3. 设线性方程组$\begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$有无穷多个解，则$t=$______.

4. 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$有一个二重特征值，且$\boldsymbol{A}$不能相似对角化，则$a=$______.

5. 若二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$是正定的，则$t$的取值范围是__________.

6. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$的负惯性指数为______.

三、解答题：满分 8 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

求方程$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ a_1 & a_2 & a_3+x & a_4 \\ a_1 & a_2+x & a_3 & a_4 \\ a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=0$的全部解.

四、解答题：满分 8 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设 4 阶矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，且矩阵$\boldsymbol{A}$满足关系式$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\top}\boldsymbol{C}^{\top}=\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{E}$为 4 阶单位矩阵，求矩阵$\boldsymbol{A}$.

五、解答题：满分 8 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,5,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,-3,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(5,1,-1,7)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(7,7,9,1)$.求该向量组的秩和一个极大无关组，并把不是极大无关组的向量用此极大无关组线性表示.

六、解答题：满分 10 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

已知 4 维向量空间有两个基:(I)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 和(II)$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4$．

(1) 写出由基(I) 到基(II) 的过渡矩阵；

(2) 已知向量$\boldsymbol{\alpha}$在基(I) 下的坐标为$(1,2,3,4)^\top$，求$\boldsymbol{\alpha}$在基(II) 下的坐标.

七、解答题：满分 10 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

已知非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1, \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1, \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$有 3 个线性无关的解.

(1) 证明方程组系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩$R(\boldsymbol{A})=2$；(2) 求a,b的值以及方程组的通解.

八、解答题：满分 10 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$，求矩阵$\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$的特征值与特征向量.

九、解答题：满分 10 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

设三元二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，已知$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，其中矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$．求一个正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，将二次型$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准形，并求矩阵$\boldsymbol{A}$．